MATH-HOME.IR

اهداف:

۱- انواع حجم هندسی را تشخیص دهد

۲- مشخصات و ویژگی‌های حجم‌های منشوری را بداند

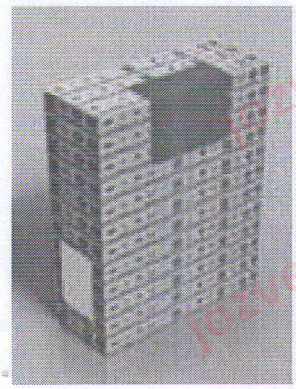
۳- گسترده‌ی حجم‌های منشوری را تشخیص دهد

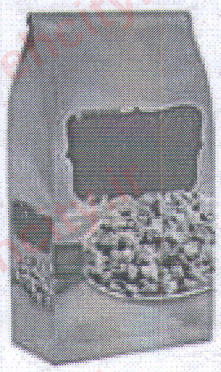
۴- مساحت جانبی و کل یک منشور را بتواند حساب کند

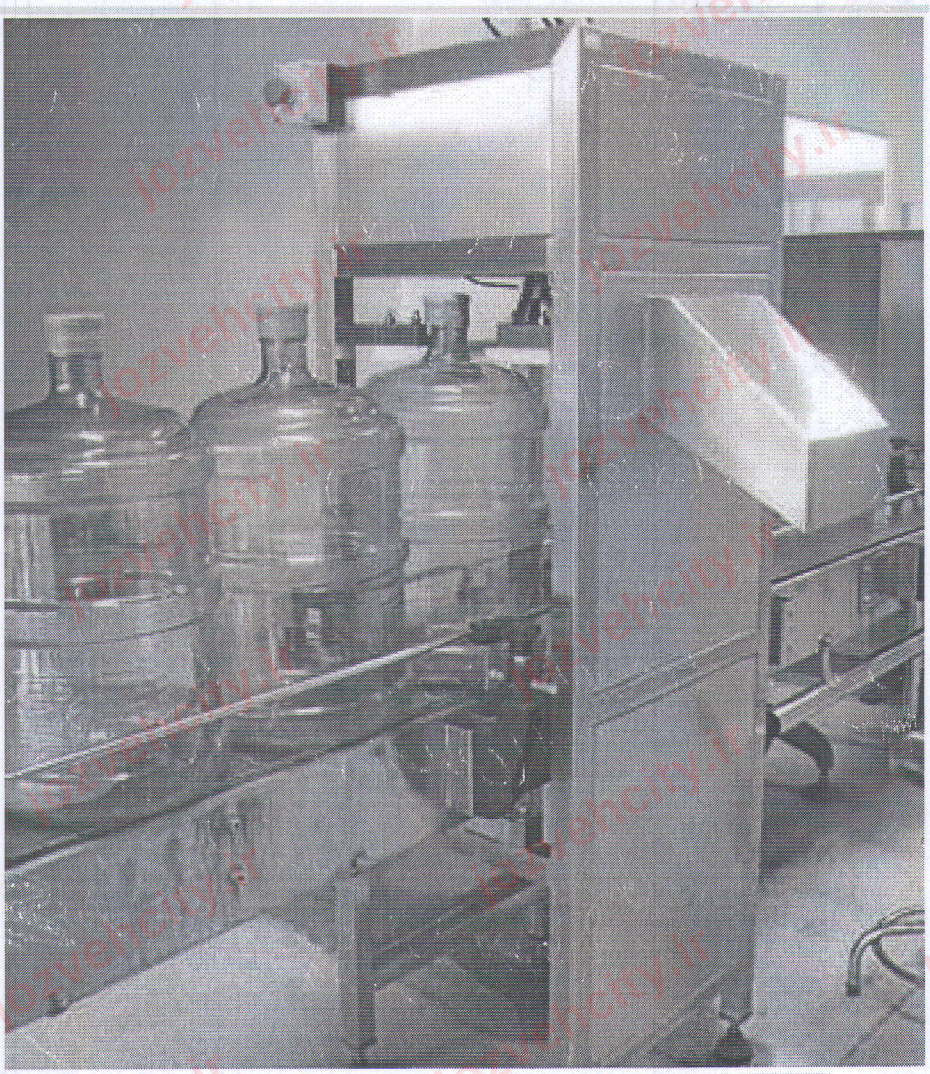
۵- درک کند استوانه یک منشور است

فصل ۵

سطح و حجم







- حجم‌های هندسی
- محاسبهٔ حجم‌های منشوری
- مساحت جانبی و کل
- حجم و سطح

اهمیت بسته‌بندی محصولات غذایی کمتر از اهمیت تولید آن محصول نیست. برای مثال در بسته‌بندی شیرینی و شکلات کیفیت و ظاهر بسته‌بندی در فروش آن تأثیر زیادی دارد. یکی از موضوعات مهم در این بسته‌بندی‌ها رابطهٔ بین سطح و حجمی است که با آن سطح می‌تواند به‌وجود آورد.

MATH-HOME.IR

حجم‌های هندسی

هر جسم مادی سه بعدی است و حجم دارد

فعالیت

۱ـ به اطراف خود (کلاس ـ خانه ـ خیابان و ...) به دقت نگاه کنید.

آیا چیزی پیدا می‌کنید که حجم نداشته باشد؟ خیر

در تصویر مقابل چه نوع حجم‌هایی را می‌بینید؟ کره ـ استوانه ـ مخروط ـ مکعب مستطیل

آیا همهٔ آنها شکل هندسی دارند؟ خیر (نظر طراح کتاب) ← اسب

آیا می‌توانید یک طبقه‌بندی از انواع حجم‌ها ارائه کنید؟ ← شکل هندسی نظم دارد

۱ـ کروی ۲ـ منشوری ۳ـ هرمی

حجم‌ها را می‌توان به دو دستهٔ هندسی و غیرهندسی تقسیم کرد. حجم‌های هندسی شکل‌های مشخص و تعریف شده دارند. حجم‌های هندسی را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: منشوری ـ کروی ـ هرمی. برخی از حجم‌های هندسی نیز ترکیبی از این سه نوع هستند.

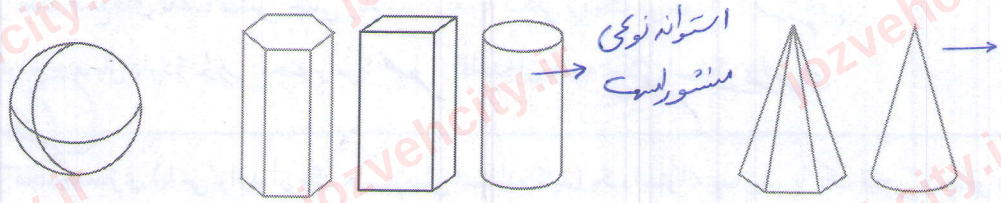
فعالیت

۱ـ در تصویر فعالیت بالا حجم‌های هندسی را با ✓ و غیرهندسی را با × مشخص کنید.

در حجم‌های هندسی نوع آن را تعیین کنید.

در حجم‌های ترکیبی نیز مشخص کنید که از چه نوع حجم‌هایی ساخته شده‌اند.

۲ـ با توجه به شکل‌های زیر خصوصیت‌های سه نوع حجم هندسی زیر را بنویسید.



استوانه نوعی منشوری است

مخروط نوعی هرم است

حجم‌های کروی — حجم‌های منشوری — حجم‌های هرمی

حجم‌های منشوری: دو قاعده‌ی مساوی دارند ـ قاعده‌ها موازی اند ـ سطوح جانبی مستطیل می‌باشد

حجم‌های هرمی: یک قاعده دارند ـ وجوه جانبی مثلث می‌باشند ـ این مثلث‌ها در راس مشترک می‌باشند

حجم‌های کروی: قاعده ندارند ـ ضلع ندارند ـ گرد هستند

اصلاح شود

MATH-HOME.IR

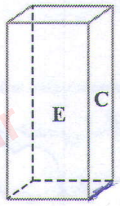
نکته: به وجه‌های بالا و پایین قاعده و به وجه اطراف وجه جانبی گوییم

حجم‌های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می‌گیرند.

به دو سطح بالا و پایین آن قاعده و به سطح‌های اطراف آن وجه جانبی، و به محل برخورد هر دو سطح یال و به نقطه برخورد هر سه سطح رأس می‌گویند.

کار در کلاس

۱ــ در هر یک از منشورهای زیر مشخص کنید چند وجه دارد؛ یال‌ها، رأس‌ها و قاعده‌ها را نام ببرید.



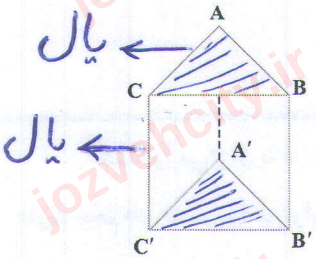
تعداد وجه‌های جانبی: ۴

رأس‌ها: ۸

یال‌ها: ۱۲

قاعده‌ها: ۲

منشور چهارپهلو



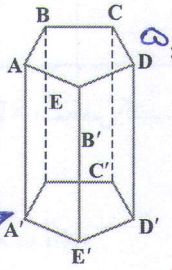
تعداد وجه‌های جانبی: ۳

رأس‌ها: ۶

یال‌ها: ۹

قاعده‌ها: ۲

منشور سه پهلو



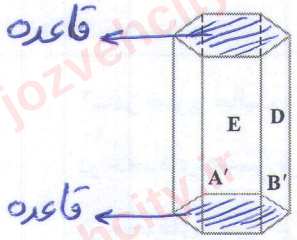
تعداد وجه‌های جانبی: ۵

رأس‌ها: ۱۰

یال‌ها: ۱۵

قاعده‌ها: ۲

منشور پنج پهلو



تعداد وجه‌های جانبی: ۶

رأس‌ها: ۱۲

یال‌ها: ۱۸

قاعده‌ها: ۲

منشور شش پهلو

اشکال چاپی

۲ــ برای اینکه در نام بردن یال و رأس چیزی جا نیفتد، از چه راهبردی استفاده می‌کنید؟ الگوسازی (جدول نظام‌دار)

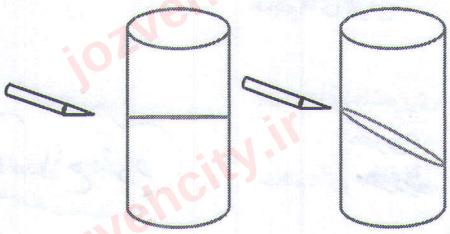
۳ــ اگر تعداد ضلع‌های قاعدهٔ منشور خیلی زیاد شود، به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ استوانه

۴ــ استوانه چند یال دارد؟ ندارد چند رأس؟ صفر قاعدهٔ آن به چه شکلی است؟ دایره

دست ورزی

فعالیت

با خمیر مجسمه‌سازی (یا می‌توانید از یک سیب‌زمینی استفاده کنید) یک استوانه بسازید. با یک قیچی یا چاقو مانند شکل‌های زیر آن را برش بزنید. سطح برش خورده را رنگ کنید و روی یک کاغذ بزنید، اثر آن به چه شکلی است؟ بیضی



همین فعالیت را می‌توانید با برش‌های دیگر تکرار کنید. همچنین به‌جای استوانه می‌توانید منشورهای دیگری را هم امتحان کنید. به این کار مقطع زدن می‌گویند.

نرم‌افزارهای زیادی هستند که می‌توانند این فعالیت را شبیه‌سازی کنند. در صورت تمایل آنها را به‌کار ببرید.

MATH-HOME.IR

تمرین

۱ــ آیا ممکن است مقطع یک کره و یک استوانه هم شکل باشند؟ در چه صورت؟ بله

آیا ممکن است مقطع یک منشور و یک هرم هم‌شکل باشند؟ بله

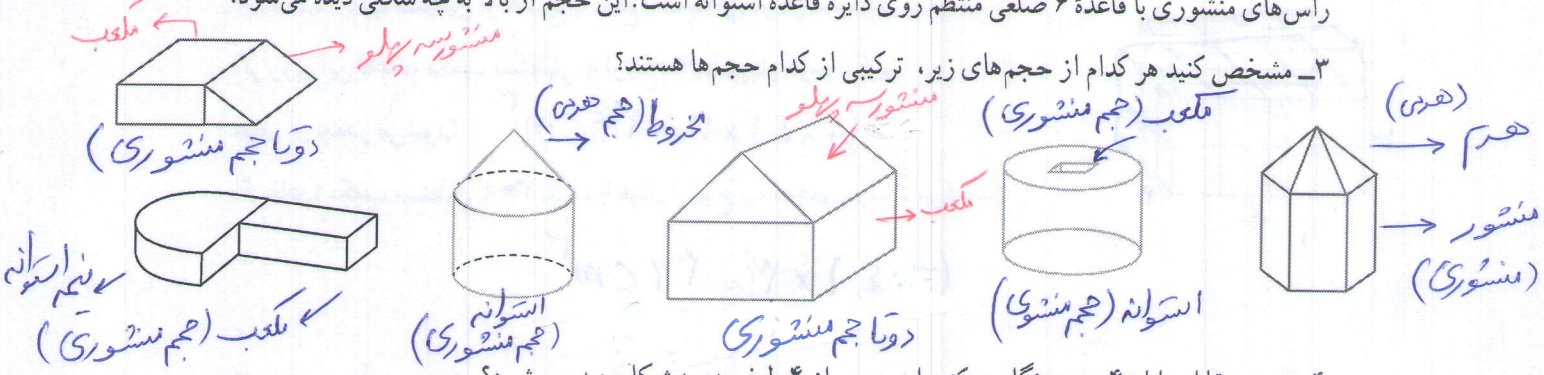
۲ــ یک استوانه از دید بالا به چه شکلی دیده می‌شود؟ دایره

یک منشور ۶ پهلو به چه شکلی دیده می‌شود؟ شش ضلعی

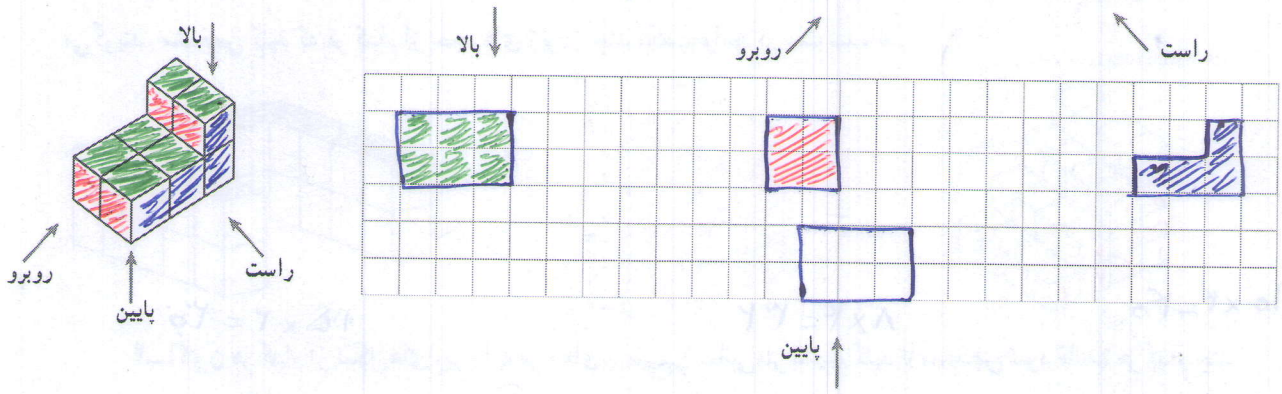
دایره‌ای که یک شش ضلعی درون آن محاط شده است

رأس‌های منشوری با قاعدهٔ ۶ ضلعی منتظم روی دایرهٔ قاعدهٔ استوانه است. این حجم از بالا به چه شکلی دیده می‌شود؟

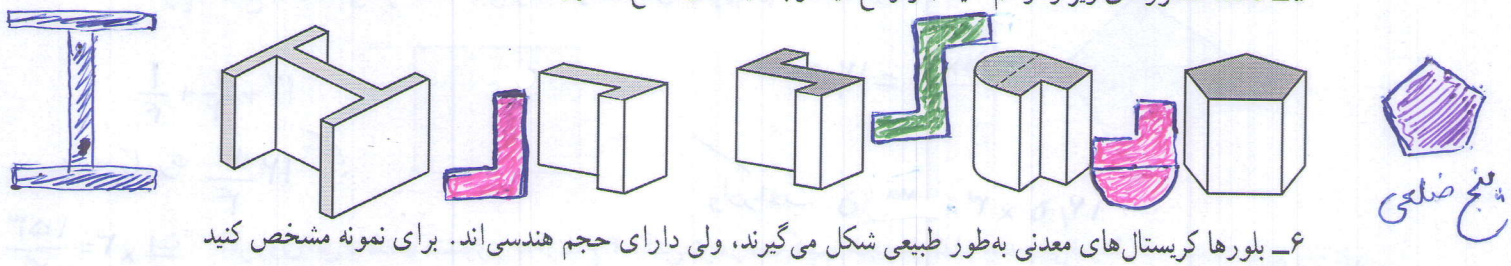
۳ــ مشخص کنید هر کدام از حجم‌های زیر، ترکیبی از کدام حجم‌ها هستند؟



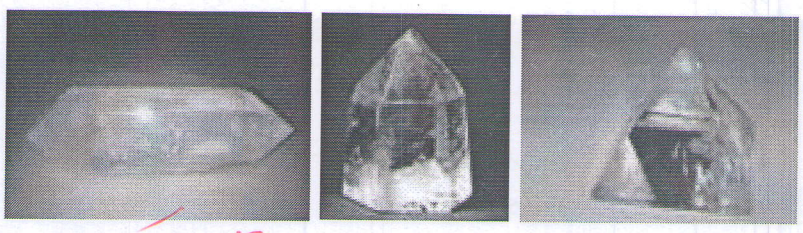
۴ــ حجم مقابل را از ۴ جهت نگاه می‌کنیم این حجم از ۴ طرف به چه شکلی دیده می‌شود؟



۵ــ قاعدهٔ منشورهای زیر را رسم کنید (در واقع دید از بالا یا همان مقطع منشور است).



۶ــ بلورها کریستال‌های معدنی به‌طور طبیعی شکل می‌گیرند، ولی دارای حجم هندسی‌اند. برای نمونه مشخص کنید ۳ بلور زیر از چه حجم‌هایی درست شده‌اند؟



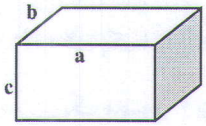
دوتا هرم و یک منشور — هرم و منشور — هرم

MATH-HOME.IR

محاسبهٔ حجم‌های منشوری

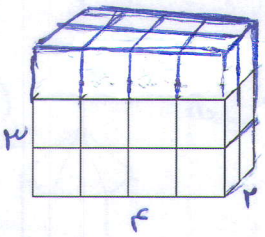
فعالیت

۱ــ در دورهٔ دبستان آموختید که حجم یک مکعب مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول، عرض و ارتفاع. با توجه به درس جبر که در فصل قبل یاد گرفتید، حجم مکعب مستطیل را با یک رابطهٔ جبری نشان دهید.



حجم V= abc

۲ــ قاعدهٔ مکعب مستطیل از ۸ مربع به ضلع یک سانتی‌متر درست شده است. (۴ × ۲)



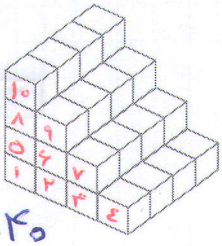
اگر روی این قاعده، مکعب مستطیلی به ارتفاع ۳ سانتی‌متر درست کنیم.

حجم آن چقدر می‌شود؟ $(۲\times۴)\times۳=۲۴cm^۳$

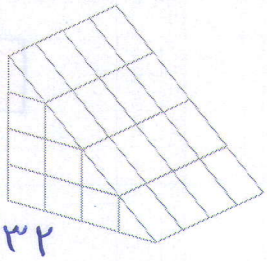
اگر قاعدهٔ مکعب مستطیل ۴ ×۳ باشد، با همان ارتفاع چه حجمی درست می‌شود؟

$(۳\times۴)\times۳=۳۶cm^۳$

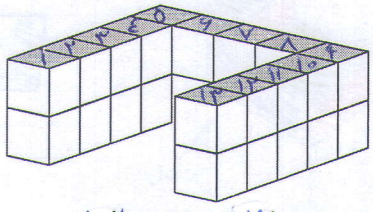
۳ــ همچنین آموختید که واحد حجم مکعبی به ضلع ۱ سانتی‌متر یا ۱ متر، یک سانتی‌متر مکعب یا یک مترمکعب می‌گویند. مشخص کنید که هر کدام از حجم‌های زیر از چند مکعب واحد درست شده‌اند.



$۱۰\times۴=۴۰$

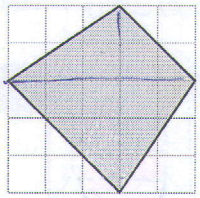


$۸\times۴=۳۲$



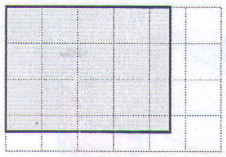
$۱۳\times۲=۲۶$

۴ــ اکنون هر کدام از شکل‌های زیر را به مربع‌های به ضلع ۱ سانتی‌متر تقسیم کنید تا مشخص شود قاعدهٔ هر کدام چند مربع به ضلع یک سانتی‌متر است. (می‌توانید از عددهای کسری هم استفاده کنید.)



$\frac{۵\times۵}{۲}=۱۲/۵$

$۱۲/۵\times۳=۳۷/۵$ واحد مکعب



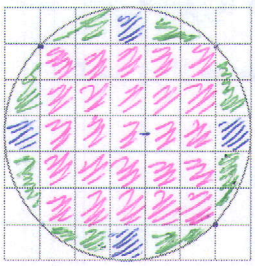
$۱۲+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}$

$۱۲\frac{۳}{۴}$ مساحت قاعده

$\frac{۵۱}{۴}\times۳=\frac{۱۵۳}{۴}$ واحد مکعب

اگر روی این قاعده‌ها منشوری به ارتفاع ۳ سانتی‌متر درست کنیم، حجم هر کدام چقدر می‌شود؟

اگر به همین ترتیب بتوانیم مساحت قاعدهٔ هر منشور را با مربع‌های واحد سطح تقریب بزنیم، چگونه می‌توانیم حجم شکل‌های منشوری را به‌دست آوریم؟ V= مساحت قاعده × ارتفاع



برای مثال قاعدهٔ یک استوانه که به شکل دایره است را با مربع‌های واحد تقریب بزنید و حجم استوانه به ارتفاع ۳ سانتی‌متر را به‌طور تقریبی به‌دست آورید.

$V\cong ۳۷\times۳=۱۱۱$ واحد مکعب

$V=(۳/۵\times۳/۵\times۳/۱۴)\times۳=۱۱۵/۴$

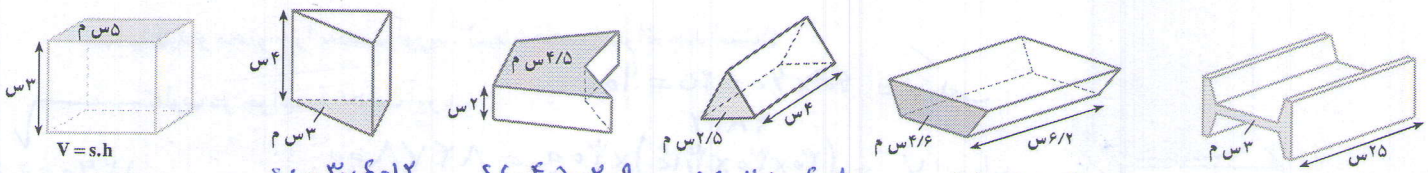
MATH-HOME.IR

کار در کلاس

۱ــ باتوجه به فعالیت صفحهٔ قبل، رابطهٔ جبری به‌دست آوردن حجم‌های منشوری (V) را که درآن مساحت قاعدهٔ منشور (S) و ارتفاع منشور (h) موجود است، بنویسید.

$V = S.h$

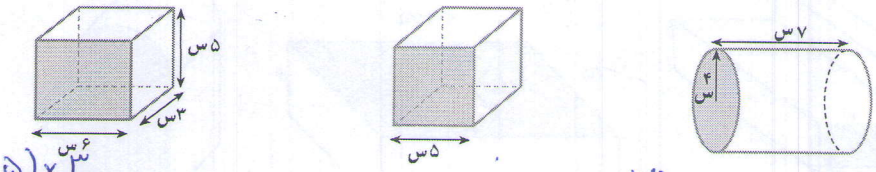
۲ــ با توجه به رابطهٔ بالا و مساحت قاعدهٔ داده شده، حجم هر شکل را محاسبه کنید.



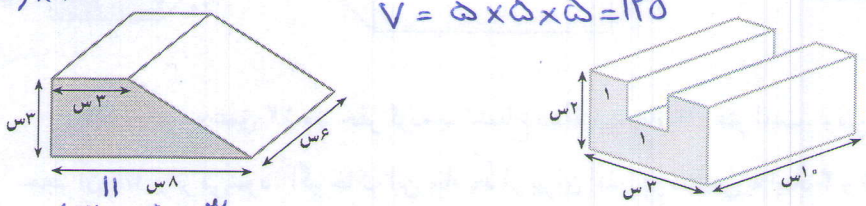
$V = 5 \times 3 = 15$ $\quad V = 3 \times 4 = 12$ $\quad V = 4.5 \times 2 = 9$ $\quad V = 2.5 \times 4 = 10$ $\quad V = 4.6 \times 6.2$ $\quad V = 28.52$ $\quad V = 3 \times 25 = 75$

$V = 4.5 \times 2.5$ $\quad V = 11.25$ $\quad V = 3 \times 5 = 15$ $\quad V = 6.5 \times 1.5$ $\quad V = 9.75$ $\quad V = 3 \times 5.5$ $\quad V = 16.5$ $\quad V = 7.5 \times 12 = 90$

۳ــ ابتدا مساحت قاعده و سپس حجم هر یک از اجسام زیر را حساب کنید. برای به‌دست آوردن مساحت و حجم هر شکل رابطه‌های جبری را بنویسید.



$V = (6 \times 5) \times 3$ $\quad V = 90$ $\quad V = 5 \times 5 \times 5 = 125$ $\quad V = (4 \times 4 \times 3.14) \times 7$ $\quad V = 50.24 \times 7 = 351.68$



$V = \frac{(3+8) \times 3}{2} \times 6 = 99$ $\quad V = (3 \times 2 - 1 \times 1) \times 10$ $\quad V = 5 \times 10 = 50$

۴ــ منبع آبی به شکل استوانه است که شعاع قاعدهٔ آن ۰/۸ متر و ارتفاعش ۲ متر است. این منبع چند متر مکعب آب می‌گیرد؟

$V = (0.8 \times 0.8 \times 3.14) \times 2 = 4.0192$ متر مکعب (2.0096)

$4.0192 \times 1000 = 4019.2$ لیتر

۵ــ یک جعبه دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵ ، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی‌متر است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه‌ها در یک کارتن مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰ و ۳۰ و ۲۴ سانتی‌متر جا می‌گیرد؟

$\frac{50 \times 30 \times 24}{25 \times 5 \times 12} = 24$

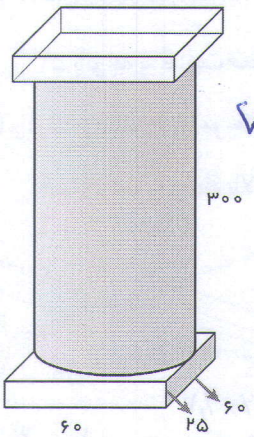
کارتن $V = 50 \times 30 \times 24 = 36000$

جعبه دستمال کاغذی $V = 25 \times 5 \times 12 = 1500$

تعداد $36000 \div 1500 = 24$

MATH-HOME.IR

تمرین



۱ــ حجم ستون شکل مقابل را به‌صورت تقریبی پیدا کنید.

(کل شکل را مکعب مستطیل درنظر بگیرید) $V = (۶۰ \times ۶۰) \times ۳۵۰ = ۱,۲۶۰,۰۰۰$

حالا کمی دقیق‌تر محاسبه کنید و آن را به سه قسمت تقسیم کرده و حجم سه تکه را جداگانه حساب کنید و مجموع را به‌دست آورید. (شعاع قاعدهٔ استوانه چند است؟)

$V_{\text{مکعب}} = ۶۰ \times ۶۰ \times ۲۵ = ۹۰۰۰۰$

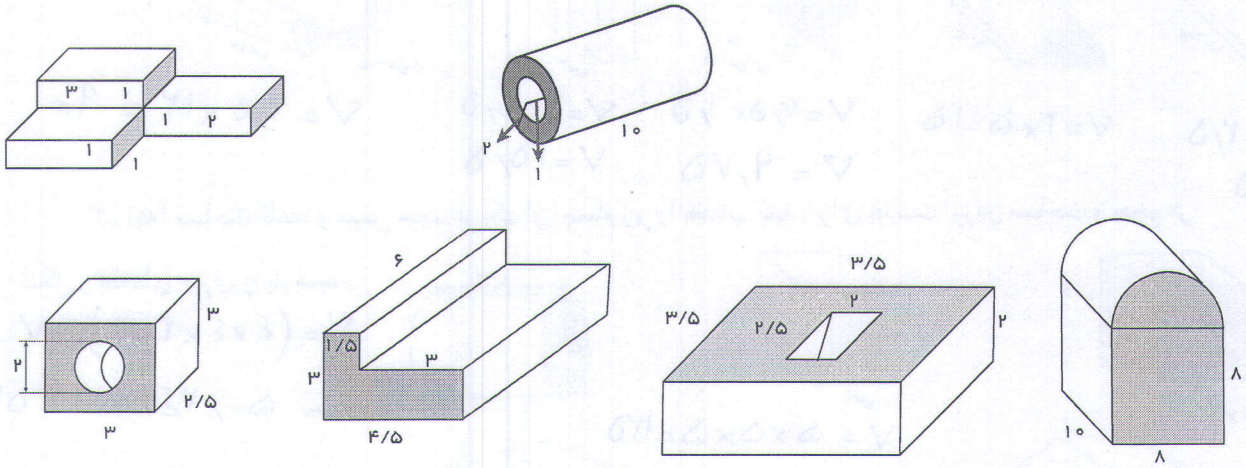
تفاوت دو جواب را به‌دست آورید.

$V_{\text{استوانه}} = (\underbrace{۳۰ \times ۳۰ \times ۳,۱۴}_{۲۸۲۶}) \times ۳۰۰ = ۸۴۷۸۰۰$

$V_{\text{کل}} = ۲ \times ۹۰۰۰۰ + ۸۴۷۸۰۰ = ۱,۰۲۷,۸۰۰$

$$\begin{array}{r} ۱۲۶۰۰۰۰ \\ -\ ۱۰۲۷۸۰۰ \\ \hline ۲۳۲۰۰۰ \end{array}$$

۲ــ حجم اشکال زیر را به دست آورید.



۳ــ چاهی به عمق ۱۲ متر حفر کرده‌ایم. شعاع دهانهٔ این چاه ۰/۴ متر است. وقتی خاک کنده و بیرون ریخته می‌شود، حجم آن ۱/۳ برابر می‌شود. اگر خاک این چاه بعد از بیرون آمدن در سطحی به ابعاد ۴ و ۵ متر به‌طور یکنواخت ریخته شود تا یک مکعب مستطیل به وجود آید، ارتفاع این مکعب مستطیل چقدر خواهد شد؟

$h = \dfrac{۰,۴ \times ۰,۴ \times ۳,۱۴ \times ۱۲ \times ۱,۳}{۴ \times ۵} \cong ۰,۴$ متر

۴ــ حوضی است به شکل مکعب مستطیل و ابعاد آن ۴ و ۳ و ۱/۵ متر است. این حوض خالی را با شیر آبی که در هر دقیقه ۶۰ لیتر آب وارد آن می‌کند، پر می‌کنیم. چند ساعت طول می‌کشد تا حوض پر شود؟

$\dfrac{۴ \times ۳ \times ۱,۵ \times ۱۰۰۰}{۶۰ \times ۶۰} = ۵$

۵ــ یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰ سانتی‌متر و شعاع قاعدهٔ آن ۴ سانتی‌متر است. آب داخل این پارچ را در لیوان‌هایی به شکل استوانه که ارتفاع آنها ۱۰ سانتی‌متر و شعاع قاعدهٔ آن ۲ سانتی‌متر است، می‌ریزیم. این آب چند لیوان را پُر می‌کند؟

$\dfrac{V_{\text{پارچ}}}{V_{\text{لیوان}}} = \dfrac{۴ \times ۴ \times \pi \times ۳۰}{۲ \times ۲ \times \pi \times ۱۰} = ۱۲$

توجه: حجم‌ها را محاسبه نکنید

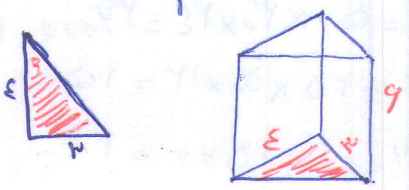
۶ــ قاعدهٔ یک منشور سه پهلو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اندازهٔ ضلع‌های قائمهٔ آن ۳ و ۴ است. ارتفاع این منشور ۶ سانتی‌متر است. حجم این منشور را پیدا کنید.

$V = \left(\dfrac{۳ \times ۴}{۲}\right) \times ۶ = ۳۶$

زمان (ساعت)	حجم آب (لیتر)
۱	۶۰×۶۰
x	$۴ \times ۳ \times ۱,۵ \times ۱۰۰۰$

۶۵

قاعده



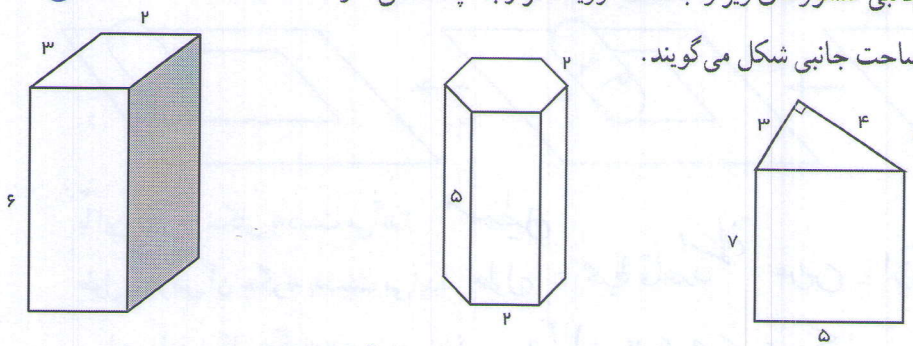
MATH-HOME.IR

مساحت جانبی و کل

فعالیت

۱ــ مساحت همهٔ وجه‌های جانبی منشورهای زیر را به‌دست آورید. هر وجه چه شکلی دارد؟ مثلث - مستطیل - شش ضلعی

به مجموع این مساحت‌ها مساحت جانبی شکل می‌گویند.

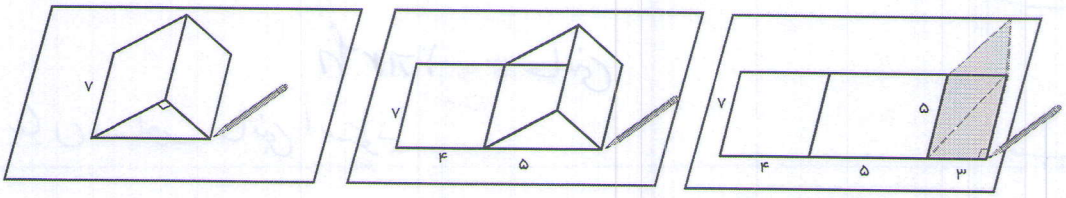


$S_{کل} = 2\times\frac{3\times4}{2} + 5\times7 + 3\times7 + 4\times7$

$S = 12 + 35 + 21 + 28 = 96$

فعالیت دست‌ورزی

۲ــ برای به‌دست آوردن مجموع مساحت جانبی منشور سه پهلوی بالا به صورت زیر، آن را روی کاغذ قرار می‌دهیم، و به اندازهٔ طول هر ضلع یک علامت می‌گذاریم.



با توجه به شکل‌های بالا چگونه می‌توانستیم ساده‌تر مساحت جانبی را به‌دست آوریم؟ $S_{جانبی}$ = محیط قاعده × ارتفاع

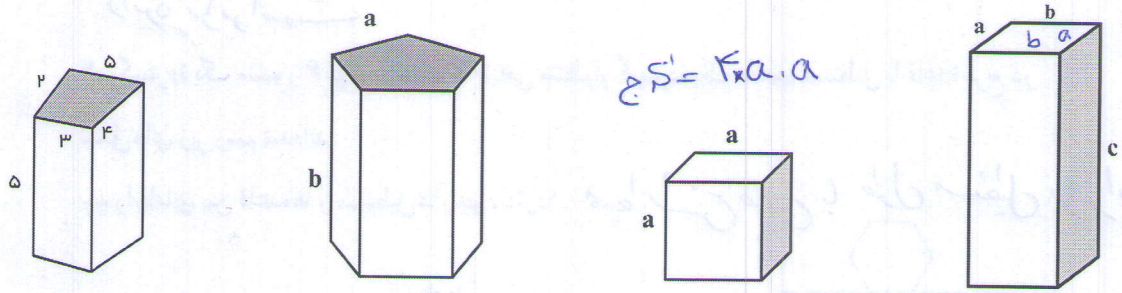
۳ــ باتوجه به ۲ سؤال بالا اگر مساحت را با S، محیط را با p و ارتفاع را با h نشان دهیم. رابطهٔ جبری مساحت جانبی منشورهای بالا را بنویسید.

$S_{جانبی} = p\cdot h$

کار در کلاس

۱ــ مساحت جانبی شکل‌های زیر را پیدا کنید.

$S_{جانبی} = 5ab$



$S_{ج} = 4\times a\cdot a$

$S_{ج} = c(2a+2b)$

$S = 2c(a+b)$

$S = 2ac+2bc$

۲ــ ستونی به شکل منشور ۶ پهلوست که هر ضلع آن ۰/۲ متر و ارتفاع آن ۵ متر است. می‌خواهند بدنهٔ این ستون را کاشی کاری کنند. چند متر مربع کاشی لازم است؟

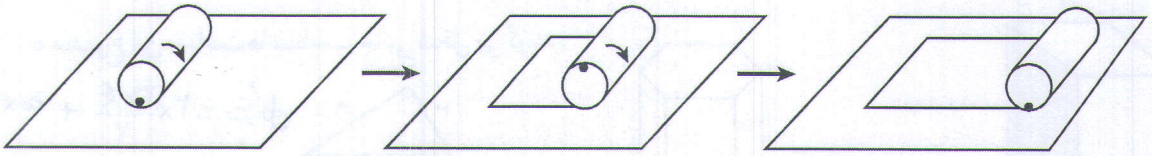
$S_{یک\ وجه\ جانبی} = 0/2\times5 = 1$ مترمربع

$S_{جانبی} = 1\times6 = 6$ مترمربع

MATH-HOME.IR

فعالیت

۱ــ یک استوانه را به شکل زیر روی یک صفحه می‌غلتانیم و ابتدا و انتهای کار را مشخص می‌کنیم.

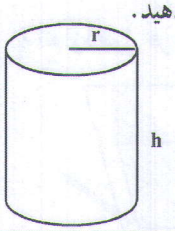


با این کار چه شکلی به‌دست می‌آید؟ مستطیل

طول و عرض آن چگونه به‌دست می‌آید؟ طول = محیط قاعده استوانه عرض = ارتفاع استوانه

مساحت این شکل چگونه به‌دست می‌آید؟ طول × عرض = کل

۲ــ با توجه به سؤال بالا مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r را با عبارت جبری نشان دهید.

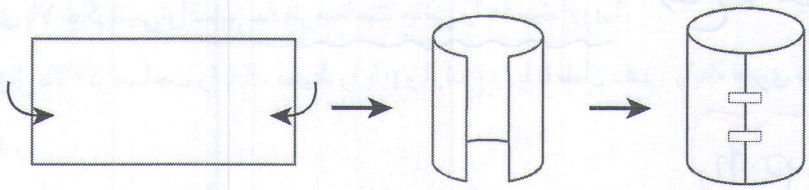


جانبی $S = 2\pi rh$

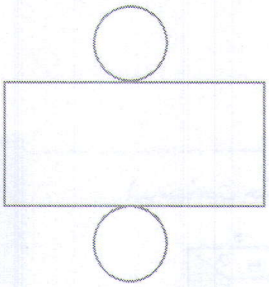
هدف: بیان مساحت جانبی استوانه

کار در کلاس

۱ــ با توجه به سؤال بالا با یک مستطیل می‌توان یک سطح استوانه‌ای درست کرد.



این سطح استوانه را روی کاغذ بگذارید و دور آن خط بکشید. این دایره قاعدهٔ استوانه است. چون استوانه ۲ قاعده دارد. ۲ دایره و یک مستطیل مساحت کل استوانه را تشکیل می‌دهند.

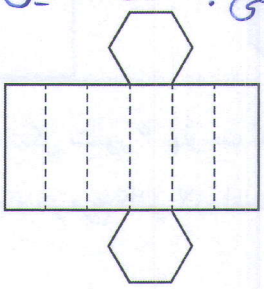


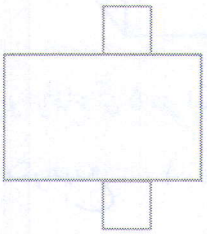
شکل مقابل را گستردهٔ استوانه می‌گویند.

چه رابطه‌ای بین دایره و مستطیل در این گسترده وجود دارد؟ طول مستطیل با محیط دایره برابر است

۲ــ گستردهٔ یک منشور ۶ پهلو با قاعدهٔ ۶ ضلعی منتظم و گستردهٔ یک مکعب مستطیل با قاعدهٔ مربع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.

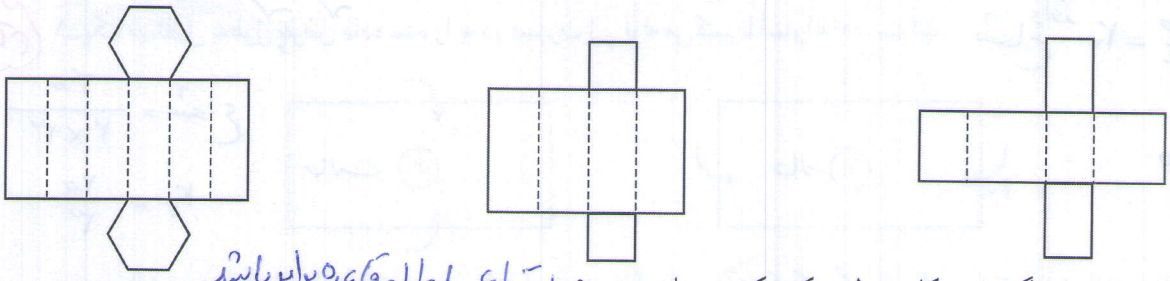
چه رابطه‌ای بین قاعده‌ها و مستطیل‌ها وجود دارد؟ محیط شش ضلعی با طول مستطیل برابر است





MATH-HOME.IR

۱ــ گسترده چند منشور داده شده است. آنها را روی کاغذ بکشید و منشورها را درست کنید و به کلاس بیاورید.

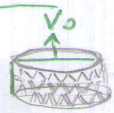


در چه صورت گستردهٔ شکل وسط به یک مکعب تبدیل می‌شود؟ ارتفاع با طول قاعده برابر باشد

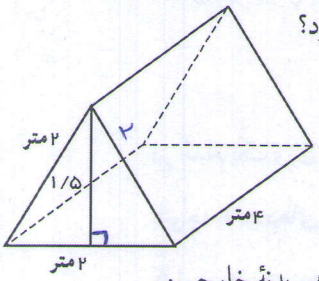
۲ــ یک غلتک بر روی زمین آسفالت شده باید ۴ بار غلت بزند تا سطح آن صاف شود. اگر شعاع غلتک ۵۰ سانتی‌متر و ارتفاع استوانهٔ آن ۱ متر باشد، برای آسفالت کردن سطح یک کوچه به طول ۲۰ و عرض ۴ متر، این غلتک باید به‌طور تقریبی چند بار بچرخد؟

$$\text{تعداد دورها} = \frac{\text{مساحت کوچه} \times 4}{\text{مساحت جانبی غلتک}} = \frac{(20\times4)\times4}{(2\times0.5\times3.14)\times1} = \frac{320}{3.14} \simeq 102 \text{ دور}$$

$$S_{\text{زمین}} = S_{\text{جانبی}} \times 10 = (70\times3.14)\times20\times10 = 43960$$



۳ــ یک چرخ ماشین که کاملاً خیس شده است، با ۱۰ دور چرخیدن روی زمین جای خود را مشخص می‌کند تا خشک شود. اگر چرخ به ضخامت ۲۰ سانتی‌متر و قطر ۷۰ سانتی‌متر باشد، چه مساحتی از زمین را خیس خواهد کرد؟



۴ــ یک چادر مسافرتی به شکل مقابل است. چند متر پارچه برای ساخت آن به‌کار رفته است؟

حجم این چادر چقدر است؟

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2(S_{\text{قاعده}})$$

$$S = (6\times4) + 2\times\frac{1.5\times2}{2} = 27$$

۵ــ یک مخزن نفت به شکل استوانه‌ای است که شعاع قاعدهٔ آن ۳ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می‌خواهیم بدنهٔ خارجی و سقف آن را رنگ بزنیم. اگر هزینهٔ رنگ کردن هر متر مربع ۳۰۰۰۰ تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

۶ــ می‌خواهیم با مقوا مکعبی به ضلع ۱۰cm بسازیم. چند سانتی‌متر مربع مقوا به‌کار می‌رود؟

۷ــ یک جعبه به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۳۰ و ۵۰ و ۴۰ سانتی‌متر را با کاغذ کادو پوشانده‌ایم. برای پوشاندن این جعبه حداقل چند سانتی‌متر کاغذ کادو لازم داریم؟ چرا در این مسئله حداقل خواسته شده است؟

۸ــ با مکعب‌های به ضلع ۱ واحد حجم مقابل را ساخته‌ایم. اگر تمام سطح‌های این حجم را رنگ کنیم، چند مکعب رنگ نمی‌شوند؟ ۸ مکعب

$4\times4\times4 = 64$ تعداد کل

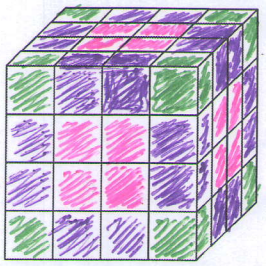
چند مکعب رنگ می‌شود؟ ۶۴ مکعب

$2\times2\times2 = 8$ رنگ ندارد

چند مکعب ۲ وجهشان رنگ می‌شود؟ ۲۴

$12\times2 = 24$ یال

چند مکعب ۳ وجهشان رنگ شده است؟ ۸ مکعب



MATH-HOME.IR

حجم و سطح

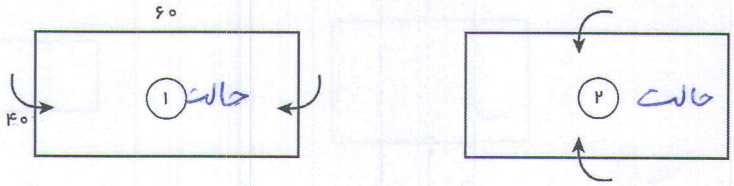
فعالیت

مهم

۱ــ یک مستطیل به‌طول و عرض داده شده را به دو صورت زیر لوله می‌کنیم تا استوانه به‌دست آید.

$\frac{\text{محیط قاعده}}{2\pi} = \frac{60}{2\times 3} = 10$ شعاع قاعده

$r_1 = 10$



$\text{شعاع} = \frac{40}{2\times 3}$

$r_2 = \frac{20}{3}$

در هر حالت حجم استوانه را به‌دست آورید. مانند نمونه از رابطه‌های جبری کمک بگیرید. برای ساده‌تر شدن محاسبه‌ها عدد پی (π) را ۳ در نظر بگیرید. در هر حالت ابتدا شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را تشخیص دهید.

$V_1 = h\times S = h_1\times r_1\times r_1\times\pi = 40\times 10\times 10\times 3 = 12000$

$V_2 = h\times S = 60\times \frac{20}{3}\times\frac{20}{3}\times 3 = 8000$

نتیجه: وقتی طول ضلع بزرگ‌تر لوله می‌کنیم حجم بیشتری پیدا می‌کند

با مقایسهٔ حجم‌ها و با توجه به اینکه هر دو حجم با یک مستطیل ساخته شده است، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ حجم اولی بیشتر است

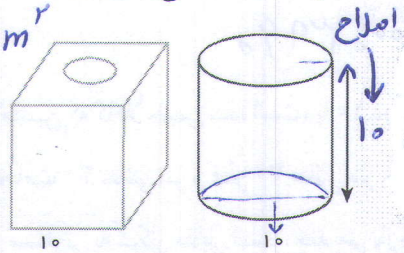
مهم

۲ــ یک کارخانه تولید چای دو نوع بسته‌بندی به شکل‌های زیر ارائه می‌کند. هر دو نوع قوطی با ورق گالوانیزه درست شده‌اند. در کدام یک چای بیشتری جا می‌گیرد؟

$S_{1\,\text{کل}} = 6\times 10\times 10 = 600\ cm^2$

$V_1 = 10\times 10\times 10 = 1000$

$\frac{V_1}{S_1} = \frac{1000}{600} = \frac{5}{3}$



$S_{2\,\text{کل}} = 2(5\times 5\times 3) + (10\times 3)\times 10 = 450\ cm^2$

$V_2 = (5\times 5\times 3)\times 10 = 750$

$\frac{V_2}{S_1} = \frac{750}{450} = \frac{5}{3}$

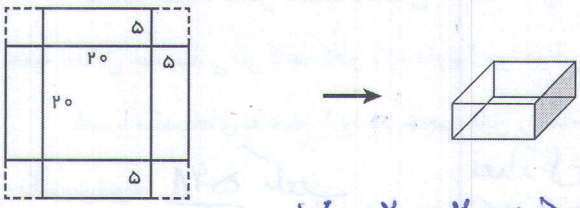
در کدام یک ورق گالوانیزهٔ بیشتری برای ساخت قوطی به‌کار رفته است؟ در محاسبات خود عدد π را ۳ در نظر بگیرید. مکعب

باتوجه به عددهای بالا اگر شما مدیر کارخانه باشید، کدام نوع بسته‌بندی را انتخاب می‌کنید؟ چرا؟ بستگی به نظر مشتری دارد

کدام نوع بسته‌بندی در حمل و نقل بهتر است و جای کمتری می‌گیرد؟ چرا؟ جعبه مکعب شکل بهتر است چون فضای خالی بین جعبه‌ها بوجود نمی‌آید

کار در کلاس

برای بسته‌بندی شیرینی جعبه‌هایی را درست می‌کنند. شکل گستردهٔ این جعبه‌ها به‌صورت زیر است و پس از تا کردن مربع‌ها گوشه‌ها روی هم قرار می‌گیرند و جعبه درست می‌شود.



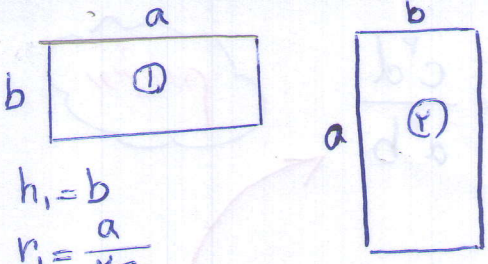
$V = 20\times 20\times 5 = 2000\ cm^3$

با توجه به اندازه‌های داده شده، حجم (گنجایش) جعبه را پیدا کنید. $2000\ cm^3$

اگر به‌جای ۵ سانتی‌متر لبه‌ها را ۶ سانتی‌متر درنظر بگیریم با همین مقوا حجم جعبه بیشتر می‌شود یا کمتر؟ کمتر می‌شود

$V = 18\times 18\times 6 = 1944\ cm^3$

MATH-HOME.IR



$h_1 = b$

$r_1 = \frac{a}{2\pi}$

$h_2 = a$

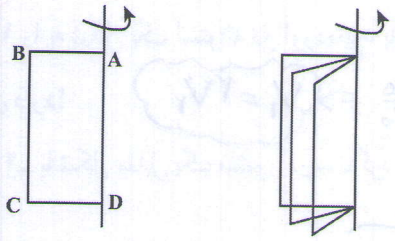
$r_2 = \frac{b}{2\pi}$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\left(\frac{b}{2\pi} \times \frac{b}{2\pi} \times \pi\right) \times a}{\left(\frac{a}{2\pi} \times \frac{a}{2\pi} \times \pi\right) \times b} = \frac{b}{a}$$

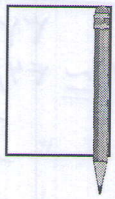
فعالیت

مهم

مستطیل ABCD را حول محوری که از AD می‌گذرد، دوران می‌دهیم. شکل زیر نشان می‌دهد که مستطیل‌ها چگونه حرکت می‌کنند.



شما هم مانند شکل زیر کاغذی را روی مدادی بچسبانید و آن‌را بچرخانید و حرکت مستطیل را تماشا کنید.



با چرخاندن این مستطیل چه حجمی به‌وجود می‌آید؟ استوانه

مشخصات آن حجم را بنویسید. AD ارتفاع استوانه است

CD شعاع قاعده‌ی آن است

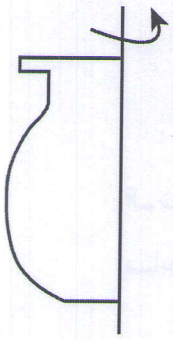
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با حرکت یک سطح در فضا حجم ساخته می‌شود. همین کار را برای شکل‌های دیگر نیز می‌توان انجام داد تا حجم‌های دیگری ساخته شوند. در سال‌های بعد در این مورد بیشتر توضیح داده خواهد شد.

کار در کلاس

۱ــ سطحی مثل شکل مقابل را حول محور d دوران می‌دهیم.

حجم چه شکلی ساخته می‌شود؟ می‌توانید با یک فرفره و چرخاندن آن حجم ایجاد شده را ببینید. یک گلدان

از این خاصیت در خراطی، تراشکاری و سفالگری برای ساختن حجم‌های مختلف استفاده می‌کنند.

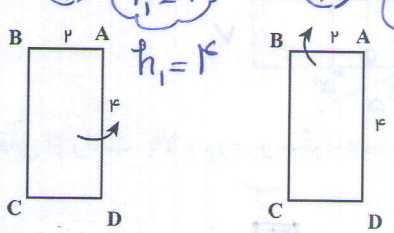


مهم

۲ــ یک مستطیل را یک بارحول محور AD و یک بار حول محور AB دوران دهید. حجم حاصل از این دوران را حساب کنید.

الف

$\pi = 3$



روش اول

$V_2 = (4 \times 4 \times 3) \times 2 = 96$

$V_1 = (2 \times 2 \times 3) \times 4 = 48$

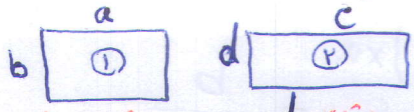
به کدام حجم بیشتری دارد؟

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(4 \times 4 \times \pi) \times 2}{(2 \times 2 \times \pi) \times 4} = 2 \Rightarrow V_2 = 2V_1$$

راه دوم راه حل تستی

راه حل دوم بالای صفحه

MATH-HOME.IR



ارتفاع b ارتفاع d

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\left(\frac{c}{2\pi}\times\frac{c}{2\pi}\times\pi\right)\times d}{\left(\frac{a}{2\pi}\times\frac{a}{2\pi}\times\pi\right)\times b}=\frac{c^2d}{a^2b}$$

روش دوم

تمرین

مهم

۱ــ یک مقوا به طول و عرض، ۵ × ۲۰ را به شکل استوانه به ارتفاع ۵ در آورده‌ایم. یک مقوای دیگر را نیز به ابعاد ۱۰×۱۰ را به شکل یک استوانه در آورده‌ایم. با توجه به اینکه مساحت مقواها در دو حالت برابر است، کدام استوانه حجم بیشتری دارد؟

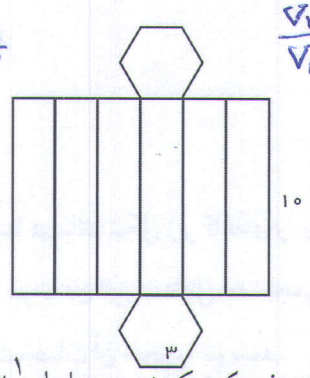
قطر $=\frac{20}{3}$

شعاع $=\frac{10}{3}=r_1$

$r_2=\frac{10}{2\times3}=\frac{5}{3}$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\left(\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\pi\right)\times10}{\left(\frac{10}{3}\times\frac{10}{3}\times\pi\right)\times5}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_1=2V_2$$

۲ــ با شکل مقابل یک منشور درست کرده‌ایم. مساحت جانبی آن را پیدا کنید.



x	$\overbrace{2/5\times4\times1/5}^{V_2}$
100	32 V_1

$$\Rightarrow x=\frac{2/5\times4\times1/5\times100}{32}$$

$$x=\frac{375}{8}\simeq46/9\%$$

۳ــ یک صابون مکعب مستطیل شکل به حجم ۳۲ سانتی‌متر مکعب پس از چند بار مصرف، کوچک شده و به ابعاد $2\frac{1}{2}$ و ۴ و $1\frac{1}{2}$ سانتی‌متر تبدیل شده است. چند درصد این صابون استفاده شده است؟

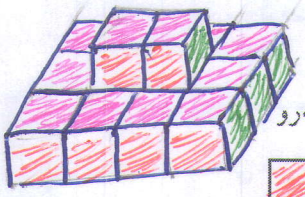
$100\%-46/9\%=53/1\%$

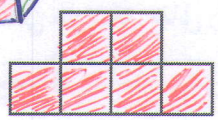
۴ــ یک استوانه که با یک مقوا به‌طول ۲۰ سانتی‌متر و عرض ۱۰ سانتی‌متر ساخته شده به‌طور تقریبی چه حجمی دارد؟ (ارتفاع استوانه ۲۰ است.)

سخت

۵ــ اگر یک حجم از بالا و سمت راست و روبرو به‌صورت زیر دیده شود، آن حجم را رسم کنید.

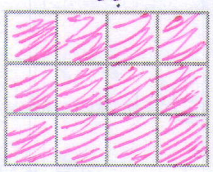
$V=(4\times3)+2=14$



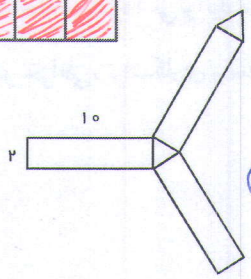


راست

بالا



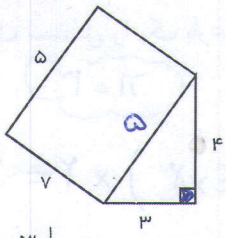
۶ــ شکل مقابل گستردهٔ یک منشور را نشان می‌دهد.

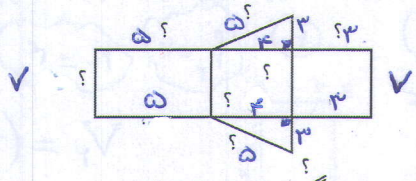


مساحت جانبی منشور را پیدا کنید.

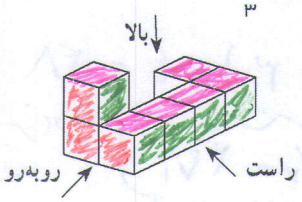
$S_{\text{جانبی}}=(2\times3)\times10=60\ cm^2$

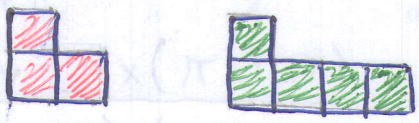
۷ــ با توجه به حجم منشور و ابعاد آن، اندازهٔ ضلع‌های گستردهٔ آن را بنویسید.



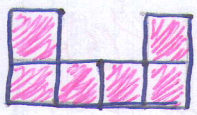


۸ــ حجم مقابل از راست، بالا و روبه‌رو چگونه دیده می‌شود؟





روبه‌رو راست



MATH-HOME.IR

MATH-HOME.IR

۵ مرور فصل

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به‌کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید. برای هر کدام مثال بزنید.

- حجم هندسی
- حجم منشوری
- مساحت جانبی
- مساحت کل
- گسترده

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه تهیه کنید.

- انواع حجم‌های هندسی
- حجم مخروطی و حجم منشوری
- قاعده، وجه، یال و رأس حجم‌های منشوری
- مقطع زدن یک حجم منشوری
- رابطهٔ پیدا کردن حجم‌های منشوری
- رابطهٔ پیدا کردن مساحت جانبی حجم‌های هندسی
- رابطهٔ پیدا کردن مساحت کل حجم‌های منشوری
- ساختن یک حجم به کمک گستردهٔ آن
- دوران سطح حول یک محور و ساختن حجم
- مقایسهٔ حجم‌هایی که به یک سطح مشخص درست شده‌اند.

کاربرد

کاربرد این فصل در زندگی روزمره فراوان است. در دنیایی از اجسام زندگی می‌کنیم و نیاز داریم حجم‌های مختلف را اندازه بگیریم و برای ساختن حجم‌ها نیز از سطح‌ها (کاغذ، مقوا، ورق و ...) استفاده می‌کنیم.

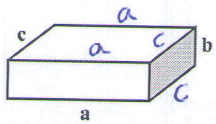
تمرین‌های ترکیبی

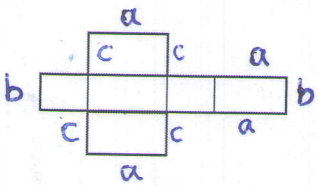
در صورتی که تمرین‌های زیر را توانستید انجام دهید. مطمئن می‌شوید که این فصل را به‌خوبی یاد گرفته‌اید.

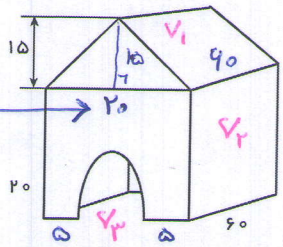
۱ــ حجم، مساحت جانبی و مساحت کل شکل‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲ ب) منشور چهار پهلو با قاعدهٔ مربع به ضلع ۲ و ارتفاع ۲۰

۲ــ الف) با توجه به شکل مکعب مستطیل اندازه و ضلع‌های خواسته شده روی گستردهٔ آن را مشخص کنید.







اصلاح شود

ب) حجم شکل مقابل را به‌دست آورید.

$n=۳$

طرامی $\Rightarrow V = V_1 + V_2 - V_3$

$$V = \frac{۱۵\times۲۰}{۲}\times۶۰ + ۲۰\times۲۰\times۶۰ - \frac{۵\times۵\times۳\times۶۰}{۲}$$

$$V = ۹۰۰۰ + ۲۴۰۰۰ - ۲۲۵۰ = ۳۰۷۵۰$$